高等学校数学科学習指導案

1　単元名

微分法のまとめ

（教科書：数研出版　改訂版　高等学校　数学Ⅲ　，副教材：study-up ノート）

2　単元の目標と評価規準

(1) 単元の目標

・微分法の発展的な内容について、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付ける。【知識・技能】

・微分法を活用して、他単元や既習事項との関連を考察し、発展的に活用する力を身に付ける。【思考・判断・表現】

・微分法において、有用性やよさを認識し積極的に活用しようとする態度、粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度、問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとする態度を身に付ける。【主体的に学習に取り組む態度】

(2)単元の評価の観点の趣旨・観点別の評価規準

	ア 知識・技能	イ 思考力・判断力・表現力	ウ 主体的に学習に取り組む態度
単元の評価の観点の趣旨	・微分法の発展的な内容について、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付けている。	・微分法を活用して、問題解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察したりする力を身に付けている。	・微分法において、有用性やよさを認識し積極的に活用しようとしたり、粘り強く柔軟に考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。 ・問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善しようとしたりしている。
学習活動に即した具体的な評価規準	①微分可能性を理解しており、あらゆる微分法により、導関数を求めることができる。 ②導関数を用いて，接線の方程式，関数の値の増減などからグラフの概形をかいたりすることができる。	①関数の連続性と微分可能性，関数とその導関数や第二次導関数の関係について考察することができる。 ②関数の変化に着目し，事象を数学的に捉え，問題を解決したり，解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。	①事象を微分法の考えを用いて考察する有用性やよさを認識し，問題解決にそれらを積極的に活用しようとしたり，粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。 ②問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとしている。

3　指導にあたって

(1) 教材観

「数学Ⅲ」は,「数学Ⅱ」の履修後に数学に強い興味や関心をもってさらに深く学習しようとする生徒や、将来、数学が必要な専門分野に進もうとする生徒が履修する科目ではあるが、その内容の高度さ、複雑さ、日常生活と結び付けることが容易ではない抽象性のため、技能が習得できると満足してしまう科目であると感じている。しかしながら、高校数学を学ぶ以上、数学Ⅲでの思考こそが、数学的な見方・考え方を一層豊かにするものと考える。したがって、数学Ⅲの特殊なイメージを払拭するため、この「微分法のまとめ」という単元では、数学Ⅱの「微分の考え」と数学Ⅲ「微分法」で共通している数学的な思考や、数学Ⅱの「微分の考え」のみでは不足している部分を補う

発展的な思考に重点を置きいている。微分法の基礎的事項から応用的事項までを網羅的に学習できるような題材を扱い、課題解決の過程で考察を深めたり、微分法を活用して論理的に考察したりすることで微分法のまとめの時間となるようにしたい。それぞれの単位時間が独立しているため、単元全体で単元の目標にかなうよう留意する。

(2) 生徒観

本科目は理系の理工学系など受験や進学後に必要のある生徒が選択する科目である。例年、20 名程度の選択であるが、本年度は選択者が 30 名と非常に多くなっている。その要因として、生徒の進路希望もあるが、１・２年次における数学科の丁寧な指導が挙げられる。数学に苦手意識を持たずに数学ⅠⅡＡＢまで学習してきた生徒が多いと感じる。中には、高度な数学を進路選択のためには不要の生徒もいるが、そのような生徒も意欲を失っておらず、概ね数学を学習することへの関心・意欲は高い。また、これまでの指導者のおかげで演習中の対話的に学ぶ姿勢が確立されている。したがって、学びの中で新たな疑問（問い）を生徒自身が持つことがある。具体的には、べき乗の微分について指数が整数の時でも成立つことを確認した際、有理数・実数の時はどうなるのか疑問が表出していた。また、微分法の応用では第２次導関数とグラフの凹凸を考える際、第１次導関数との関係を考察しようとするなどしていた。教科書の演習などでも対話的に解決していく場面が多く見られる。

一方で、他の事象と関連付けて発展的に考察したり、論理的に考察したりする部分はまだ課題がある。直前の単元との結びつきや、関連は生かすことは比較的できる方であるが、十分とはいえない。特に、数学Ⅲ以外の単元での学びには中々結びつかない。数学Ⅲの「微分法」の学びを関連付けた本単元の題材を通して、生徒に、既習内容を踏まえて考察を深めたり、微分法を活用して論理的に考察したりする力を身に付けたい。

(3) 指導観

単元「微分法」では、微分可能性や関数の和、差、積及び商の導関数、合成関数の導関数を求めること、三角関数、指数関数及び対数関数の導関数を求めること、導関数を用いることで、グラフの概形をかいたりすることなど、一通りの基本的な概念や原理・法則は、単なる暗記に陥らないように、留意しながら指導してきた。また、関数の局所的性質や大局的性質について理解を深めるために、生徒の理解度によってはコンピュータなどを活用しながら進めてきた。本単元では、既習事項の振返りとしてだけではなく、数学Ⅱなどの他の科目で履修した内容との継続性・連続性を意識して指導を行う。指導の際は、対話的・協働的な学びを心掛け、発表や討論により主体的に学習を進めるゼミナールのような授業を展開することを目標としている。生徒の多くは、大学へ進学後さらに発展的な学びへ向かっていき、探究的な学びをまさに体現していくこととなるので、「微分法のまとめ」を通じてそのような力を育成したい。また、数学Ⅲまで履修した生徒ならではの数学のよさや奥深さを感じられるような展開を心掛ける。

4　単元の指導と評価の計画（計 4 時間）

次 (時間)	ねらい	学習内容・学習活動	評価規準(評価方法)
1	微分可能と連続性の関係、微分可能であることの定義について理解を基に、考察できるようにする。	発展的な問題を通して、微分可能と連続性の関係、微分可能性について、考察する。	イ―①（学習プリント） イ―②（学習プリント）

2	いろいろな関数の微分やそれらを活用した問題について理解できるようにする。	特に、三角関数、対数、指数などを正確に微分する。また、自然対数の定義についても確認する。	アー①②（行動観察）
3	関数の変化に着目したり，既習事項と関連付けたりして大小関係の比較し、問題を解決することができるようにする。	自然対数を含んだ数の大小関係について、微分法を用いることでグラフが単調減少であると見通しを持ち、考察する。	アー②（行動観察） イー②（学習プリント・発表）
4	微分のまとめとして総合問題を演習し、数学Ⅲで学んだ微分法の良さや有用性を振り返ることができる。	微分法を含んだ総合問題の演習を通して､その問題解決の過程を振り返って学習の成果を実感する。	ウー①②（学習プリント）

５　本時の展開

(1)　ねらい

・関数の変化に着目したり，既習事項と関連付けたりして大小関係の比較し、問題を解決することができる。　【思考・判断・表現】

(2)　展開

時間	学習内容・学習活動 ○ 質問・発問・指示　S 生徒の反応　・ 学習活動	指導上の留意事項 ・ 留意点　T 教師の手立て　◇ 評価規準(評価方法)
導入 ３分	○今日は大小関係の問題を扱います。 ○本日の問いを確認します。 「$\frac{\log e}{e}$ ， $\frac{\log \pi}{\pi}$ のどちらが大きいか」ついて、どのように考えればよいだろうか	・座席は自由席。座席配置も自由とする。 T：単元の目標である、関連付けを意識することを確認。
展開 ① 18分	○どちらが大きいかを予想してみよう S1：$\log e$は１だから片方は$\frac{1}{e}$だ。 S2：$\frac{\log \pi}{\pi}$がうまく計算できない。 S3：単純計算は少々面倒だ。 ○今までどのように大小比較をしていたか？ S1：２数を引いた差と０の大小関係から示す。 S2：関数の単調減少・増加の性質を利用する。 S3：$\log e^{\frac{1}{e}}$ と $\log \pi^{\frac{1}{\pi}}$ を比較すればうまくいかないかな。 ○どれかの方法かを選んで大小比較をしてください。 ・それぞれで検討する。グループ、個人の形態は問わない。 ○机間指導で以下のようなやりとりをする。最終的に生徒に解答を発表してもらう。 S1：$\frac{\log e}{e} < \frac{\log \pi}{\pi}$ と予想して、$\frac{\log \pi}{\pi} - \frac{\log e}{e}$を考えました。$\pi < e \log \pi$まではたどり着いたので	T：周囲と対話的に学べるように声掛けをする。 ・この段階では、単純な予想なので、自由に意見を出させる。 T：大小比較する方法にはどんな方法があるか発言させる。発言がない場合は、微分を用いた不等式の証明や数Ⅱの既習事項を振り返るよう働きかける。 ・数Ⅱの教科書データを画面で提示してもよい。 T：グループになってもよい。全体ですべての解答が出そろうように配慮する。 ・生徒の解法をタブレット端末で写し、前方のモニターへ投影し、生徒に解説をしてもらう。 T1：S2、S3 の考え方を共有して、関数を定義する

	すが途中でわからなくなりました。 S2: $\frac{\log e}{e} < \frac{\log \pi}{\pi}$ と予想して、両辺に$e\pi$をかけました。$\pi < e\log\pi$まではたどり着いたのですが途中でわからなくなりました。 S3：底はｅだから、$e^{\frac{1}{e}}$ と $\pi^{\frac{1}{\pi}}$ の大小関係を比較することはわかるけど、$\frac{1}{e}$ と$\frac{1}{\pi}$ があるからな。$y = x^{\frac{1}{x}}$ のグラフをかいて確かめたいけど、どうしたらよいのだろう。	ことに気づかせる。 T2:定数πを変数として置き換えて、関数を定義するとよいことに気付かせる。 T3:両辺の対数をとって考えることを伝える。
	○どのような関数でとらえればよいだろうか。 S1：$y = \frac{\log x}{x}$ のグラフをかいて考えた。 $x = e$で極大値となるので、$x > e$ ではグラフは単調減少。$e < \pi$だから$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$だ。 S2：$f(x) = e\log x - x$として、$f(x) > 0$ を示す。 $f'(x) = \frac{e}{x} - 1$となり$x = e$で極大値をもつことまでは確認できたよ。 S3：$y = x^{\frac{1}{x}}$ のグラフをかいたら、$x = e$で極大値をもつことを確認したよ。$e < \pi$ だから、 $e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}}$ が得られたよ。	・S1～S3 どの方法でも関数を定義し、微分をすることで結論が得られることに留意する。 T：グラフがかけない生徒に対しては、どこでつまずいているのか確認する。 ・以下、必要な場面で補助的な発問に心がける。 T1：完全に導けていなくても、方向性がこれに近いものについては、考え方を全体で共有する。 T2,3：グラフをかいた段階で、今何を求めるべきかについて、わからなくなっているので、最初の問題に立ち返り、何を求めるか再度確認させる。 ・問いの答えは、こちらから示すのではなく、生徒同士で導き、共有できるようにする。
	S1:$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$ であることがわかったけど、eとか、π があると大小関係の比較って難しいね。 ○それでは、こんな場合だったらどうだろう。 ○課題１	◇【思】関数の変化に着目したり，既習事項と関連付けたりして大小関係の比較し、問題を解決することができる
	e^{π}とπ^{e}の大小関係を考えよう	
	S1：また、引き算や関数だろうか S2：さっきの関係はつかえないかな	
	○今日の「問い」は今日のポイントになる「考え方」でもあるね。 S1:対数をとると、 e^{π}は $\pi\log e$ となり、π^{e}は $e\log\pi$となる。 S2：$e\pi$で割ると、 $\frac{\log e}{e}$, $\frac{\log \pi}{\pi}$ なるよ。 S3：（S2 に対して）$e\pi$で割るなんてことしてよいのかな。	T：さきほどの大小関係をうまく活用するように助言をする。
	○良い考え方が出てきたね。 先ほどの問題と関連付けて考えると、 $e^{\pi} > \pi^{e}$であることがわかったね。 ○それでは、次の場合だったらどうなるだろう。	・関連付けて考えるためにはどのような工夫が必要か、また関連付けて考える有用性を確認し上で、S2 の考えを説明させて、共有する。

展　開 ② 15 分	課題２ 太郎さんは　$0<a<b$であるとき、$b^a<a^b$が常に成り立つと考えた。 正しいかどうか確認せよ。ただし、理由も書くこと。	・ワークシートで配布
	S1:さっき増減表を書いたけど、何かヒントはないかな。 S2: $0<e<\pi$で $\pi^e<e^\pi$なんだから。成り立つと思う。 S3:こういう問いが出るということは正しくないだろう。 S4：また、対数をとってみると、$a\log b$ と$b\log a$ になるよ。 S5：今度は ab で割ってみよう。そうしたら、$\frac{\log b}{b}$ と$\frac{\log a}{a}$になるから、初めの課題と同様に考えられるね。 ・個人思考させる。	T：グラフがかけない生徒に対しては、どこでつまずいているのか確認する。 ◇【思】関数の変化に着目したり，既習事項と関連付けたりして大小関係の比較し、問題を解決することができる
展　開 ③ 10 分	・近くの席の生徒と解答を共有させる 〇それぞれの解答を確認しよう。	・生徒どうしで互いに確認する。 ・わからない部分などを教え合う。 T：結論として、$0<e<a<b$の範囲で成り立つことの確認。
まとめ ５分	〇この時間でポイントになった考え方について、振り返ろう。	・google classroom で Forms によるアンケートを実施する。

６　引用・参考文献

・文部科学省「高等学校学習指導要領解説　数学編（平成 30 年７月告示)」
・数研出版「改訂版　高等学校　数学Ⅲ」　「改訂版　高等学校　数学Ⅱ」
・国立教育政策研究所「『指導と評価の一体化』のための学習評価に関する参考資料　高等学校数学」

１時間目で扱う題材の例

実数全体を定義域とする関数 f(x)は全ての実数 a,b に対し、

$$f(a+b)=f(a)+f(b)+4ab$$

を満たすとする。さらに、関数 f(x)は x=0 で微分可能で、$f'(0)=2$であるとする。
関数 f(x)は区間$(-\infty、\infty)$で微分可能であること示せ。

２時間目で扱う題材の例

① $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ の値を求めよ。

② $\lim_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{2}{x}}$ の値を求めよ。

③ $y = e^{\sin x + \cos x}$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ のグラフをかけ。