

高等学校数学科学習指導案

日 時 令和6年12月6日(金)
 第3校時 10:45~11:35
 対 象 1年2組数学Ⅱ(40名)
 学校名 北海道札幌南高等学校
 授業者 教諭 山 後 裕 紀
 場 所 2階理科講義室

1 単元名

数学Ⅱ 第4章「三角関数」

教科書：数学Ⅱ（数研出版）／副教材：4STEP 数学Ⅱ＋B、チャート式基礎からの数学Ⅱ＋B

2 単元の目標と評価規準

(1) 単元の目標

- 三角関数の考えについての基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付ける。

【知識・技能】

- 三角関数に関する様々な性質について考察するとともに、三角関数の加法定理から新たな性質を導いたり、三角関数の式とグラフの関係について多面的に考察したり、二つの数量の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりする力を身に付ける。 【思考・判断・表現】
- 三角関数について、数学のよさを認識し数学を活用しようとする態度、粘り強く柔軟に考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度、問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う。 【主体的に学習に取り組む態度】

(2) 単元の評価規準

ア 知識・技能	イ 思考・判断・表現	ウ 主体的に学習に取り組む態度
①角の概念を一般角まで拡張する意義や弧度法による角度の表し方について理解している。	①三角関数に関する様々な性質について考察することができる。	①日常事象を三角関数の考えを用いて考察することを通して、数学のよさを認識したり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたっている。
②三角関数の相互関係などの基本的な性質を理解している。	②三角関数の方程式・不等式について多面的に考察することができる。	②問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。
③三角関数の値の変化やグラフの特徴について理解している。	③三角関数の加法定理について多面的に考察することができる。	
④三角関数の加法定理や倍角の公式、三角関数の合成について理解している。	④三角関数の加法定理から新たな性質を導くことができる。	

3 指導に当たって

(1) 教材観

① 本時の教材（問題や内容）を選択した理由

数学Ⅰで学んだ三角比は、あくまで図形の計量を目的としたものであり、関数として取り扱われてはいなかった。本単元では角の範囲を一般角まで拡張した上で三角関数の意味を理解し、それらのグラフを通して周期性などの三角関数の特徴について理解できるようにするとともに、三角関数を具体的な事象の考察に活用することなどを通して「三角関数として捉えることのよさ」を生徒が探究し続けられることを目標とする。三角関数として捉えることのよさに気付く具体的な場面としては、弧度法の定義を学ぶ場面のほか、グラフをかいてその特徴について考察する場面や、単元のまとめとして日常事象を数学化する場面などを想定している。

本時の教材には、三角関数の和のグラフに焦点を当てて、 $y = \sin x + \cos x$ のグラフが1つの正弦波として表現できることを複数の方法で説明する問題を選定した。その理由としては、位相が同じ三角関数の和が1つの正弦波にまとめられることに、この単元独特の「よさ」があり、生徒が探究する題材として単元の中心に組み込むことが必要であると考えたからである。本時以前に、関数 $y = \sin x + \cos x$ を考察することの動機付けとするために、三角関数のグラフの第1時において波の重ね合わせの原理について簡単に紹介し、正弦波が日常の事象によく表れていることや波の重ね合わせがノイズキャンセリングなどに使われていることに触れている。日常生活の中で聞こえている音は、ほとんどが周期的ではないような複雑な波形をしており、これらの複雑な波は正弦波を足し合わせて表現されることを紹介している。さらに、和のグラフを考えることについては、グラフの振幅や周期などを考察する場面において、 $y = 3 \sin x$ のグラフが $y = 2 \sin x + \sin x$ と考えられることにも触れておく予定である。

また、単元の中の指導順序としては、三角関数のグラフを学習した後に加法定理や三角関数の合成に入ることが一般的であると考えられるが、本実践では三角関数の和のグラフから三角関数の合成へのつながりを意識し、順序を変更して単元の指導計画を作成している。

② 本時で重要な活動

本時のねらいは「関数 $y = \sin x + \cos x$ のグラフが1つの正弦波になることについて、既習の知識を活用して考察することができる」ことであるため、等式 $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ が成り立つことについて、複数の解決方法を検討することに数学的価値があると考え、解決の過程においては、代数的な説明をするだけでなく、同じ問題を幾何的に見ることによって数学的な見方・考え方は大いに深まるものがあるが、想定している着想すべてが授業内で生徒から出ることは考えにくいいため、多様な考えを1つでも多く取り上げたい。

また、生徒が本時の考察を進めていく中で、「和のグラフが1つの正弦波として表されることの『よさ』とは何か」について、1人でも多くの生徒の頭の中に問いが生起し、次時の三角関数の合成につながれるとともに、授業後には生徒自身による探究が自走していくことを期待したい。

(2) 生徒観

本校は各学年8間口の全日制普通科の学校である。難関大学や医学科への進学を希望する生徒が大半を占めており、7割超の生徒が理系を選択している。既に数学Ⅲまで自ら学び終えている生徒がいるなど、数学において特に秀でた才能を示す生徒がクラスを牽引する場面もある一方で、大半の生徒は数学の進度の速さに付いていくのに必死であり、提出を課している青チャートに日々追われて過ごしている。中学生の頃とのギャップや学習への伸び悩みなどから、モチベーションを保つことができなくな

って、家庭学習の時間が減り始めている生徒が徐々に始まっており、課題を消化しきれない生徒は2割ほどになる。授業中も教師の指示を待ってから動く生徒が多く、「自走する」ことについては発展途にある。また、思考力の向上についても課題があり、特に、他者評価で安易にAを付けるなど、批判的思考力が足りないと感じ取られる場面も見られる。

参考に、本クラスの生徒に対するレディネステストの結果を次に示す。表1は速解トレーニング（5分間10問、令和6年11月中旬実施）の結果であり、表2は実力テスト（令和6年10月実施）の結果である。三角比の定義などに関する理解が高い一方で、正弦定理や余弦定理などの活用を短時間で解決することについては課題があるように見える。また、正確な計算力には大きな課題があり、基礎基本の重要性については日頃から指導しているところである。

設問	正答率
$\sin \theta = \frac{1}{2}$ のときの θ	75.7%
$a = 8, b = 6, c = 4$ のときの $\triangle ABC$ の面積	40.9%

（表1）速解トレーニングの結果

設問	正答率
$(x^2 - x + 1)^{20}$ を展開したときの x^2 の係数	43.9%
$f(x) = (k + 2)x^2 - 2(k^2 + 2k + 3) + 4$ の最小値 (k は正の整数)	19.4%

（表2）実力テストの結果

(3) 指導観

受験対策として数学の学習を捉えたときに、様々な解法をひたすら暗記し、パターン化して計算の処理を行おうとする生徒は少なくない。中学校まではその方法で何とかこなしてきたかもしれないが、そういった考えをもつ生徒の多くが高校の学習でつまずき、考え方の転換を迫られることになっている。本校の数学の授業スピードは他に例を見ないくらい速いが、単に学習すべき内容を詰め込むような指導ではなく、単元ごとに決められた配当時間の中で学習内容に軽重をつけて数学的活動を効果的に取り入れたり、単元末の振り返りにおいて「この単元における数学のよさ」、「単元を通して気付いた新たな問い」を記述させたりすることで、生徒自身が数学的に考えることの「よさ」に気が付き、探究することに重きを置くことができるように指導している。具体的には、数学の本質的なところに焦点を当て、ペアワークなどで生徒に根拠や背景をアウトプットさせる活動を多く取り入れるとともに、生徒が自走して探究する姿勢を身に付けることができるようにするため、教師自らが数学の「よさ」を語る大切と考え、自らも探究しながら教材研究と授業改善に取り組んでいる。

日々の授業すべてを探究的にすることは難しいが、単元の中でどこに探究的な学びが取り入れられるかを考えて、探究的な学びを軸とした単元の指導計画を立てるようにしている。また、数字を変えただけのような練習問題は授業内で極力扱わず、「今日すぐやるべき青チャ」として日々の家庭学習として課すことで、授業では問題解決と練り上げができる時間の確保を行っている。

4 単元の指導と評価の計画 (全 14 時間)

時		ねらい・学習活動・主に扱う問題	重点	記録	評価規準(評価方法)
1	解説	弧度法による角度の表し方について理解できるようにする。 【問題】 $r = 3, \theta = \frac{\pi}{4}$ である扇形の弧の長さや面積を求めよ。	知		ア①(ワークシートの観察)
2	練習	単位円を用いて三角関数の性質について考察できるようにする。 【問題】 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\theta + \pi) + \sin\left(\theta + \frac{3}{2}\pi\right) + \sin(\theta + 2\pi)$	知 思	○	ア②(ワークシートの観察) イ①(ワークシートの観察)
3	探究	三角関数で弧度法を用いることよき気づき、探究しようとする。 【問題】 $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4$ の大小関係を調べよ。	態		ウ①(ワークシートの観察・発問に対する反応の観察)
4	演習	単位円を用いて三角関数を含む方程式・不等式を考察できるようにする。 【問題】 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を解け。	思		イ②(ワークシートの観察・発問に対する反応の観察)
5	解説	加法定理の証明を理解し、2 直線のなす角を求めることができるようにする。 【問題】2 直線 $y = \frac{1}{2}x + 1, y = 3x - 1$ のなす鋭角 θ を求めよ。	知		ア④(ワークシートの観察)
6	練習	倍角の公式を用いて方程式・不等式の角を統一して考察できるようにする。 【問題】 $0 \leq x < 2\pi$ のとき方程式 $\sin 2x = \cos x$ を解け。	思	○	イ④(ワークシートの観察・発問に対する反応の観察)
7	探究	方程式・不等式の考察に和積の公式を活用しようとする。 【問題】 $0 \leq x < 2\pi$ のとき方程式 $\sin 3x + \sin x = 0$ を解け。	態		ウ②(ワークシートの観察・発問に対する反応の観察)
8	探究	周期性などに着目し、三角関数で捉えるよきについて考えようとする。 【問題】 $y = \sin x$ のグラフをプロットして特徴をつかもう。	態		ウ①(ワークシートの観察・発問に対する反応の観察)
9	練習	グラフの特徴について理解し、グラフをかきことができるようにする。 【問題】 $y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフを描き、その周期をいえ。	知		ア③(ワークシートの観察)
10	練習	グラフの特徴について理解し、グラフをかきことができるようにする。 【問題】 $y = \tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフを描き、その周期をいえ。	知		ア③(ワークシートの観察)
11	探究	関数 $y = \sin x + \cos x$ のグラフが 1 つの正弦波になることについて、既習の知識を活用して考察することができるようにする。 【問題】 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ が成り立つことを示せ。	思	○	イ①(ワークシートの観察・発問に対する反応の観察)
12	解説	三角関数の合成について理解し、やや複雑な三角関数を含む方程式・不等式を解くことができるようにする。 【問題】 $0 \leq x < 2\pi$ のとき不等式 $\sin x - \sqrt{3}\cos x > -1$ を解け。	知		ア④(ワークシートの観察) イ④(ワークシートの観察・発問に対する反応の観察)
13	演習	三角関数の最大・最小などを考察することができるようにする。 【問題】関数 $y = (\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x + 1$ ($0 \leq \theta < \pi$) の最大値・最小値を求めよ。	思		イ①(ワークシートの観察・発問に対する反応の観察)
14	探究	日常事象について三角関数を用いて考察することで、数学のよきに気づき、探究しようとする。 【テーマ】5 倍角の公式の導出	態	○	ウ①②(ワークシートの観察・発問に対する反応の観察)

知：「知識・技能」 思：「思考・判断・表現」 態：「主体的に学習に取り組む態度」

5 本時の展開

(1) ねらい

- 関数 $y = \sin x + \cos x$ のグラフが1つの正弦波になることについて、既習の知識を活用して考察することができる。

【思考・判断・表現】

(2) 展開

時間	学習内容・学習活動 ○ 質問・発問・指示 S 生徒の反応 ・ 学習活動	指導上の留意事項 ・ 留意点 T 教師の手立て ◇ 評価規準(評価方法)
導入 10分	<p>○弧度法での三角関数の値について、確認しよう。(ペアで問題を出し合う)</p> <p>S1: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$</p> <p>S2: $\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$ など</p> <p>○今日の課題の前に、次の4つの関数について考えてみましょう。仲間はずれを1つ選ぶとしたら、どれだと思いますか。(予想をペアで共有する)</p> <p>① $y = \sin x + \cos x$ ② $y = \sin x + 2 \cos x$ ③ $y = \sin x + \cos 2x$ ④ $y = \sin 2x + \cos 2x$</p> <p>S3: グラフはどうなるかな。 S4: 係数がグラフにどう影響してくるのかな。 S5: 周期が 2π ではないものが含まれる。 S6: 振幅や最大値・最小値はどうなるかな。 S7: 関数を足すことでどうなるのだろう。 S8: 仲間はずれの定義は何なのだろう。</p> <p>○何番が仲間はずれだと思ったか、簡単な理由とともに、番号を教えてください。</p> <p>S9: なんとなく感覚で番号を選んだ。 S10: 係数がついているのは②だけだから、仲間はずれは②だと思う。 S11: 違う周期の関数が足されているのは③だけだから、仲間はずれは③だと思う。 S12: どれも自分ではグラフを描けないので仲間はずれを判断できない。</p>	<p>・じゃんけんで生徒の役割を決め、スムーズに始められるようにする。</p> <p>・欠席等でペアを組めていない生徒へフォローする。</p> <p>・問題を出し合っている間に黒板へ課題となる関数を板書しておく。</p> <p>・前時までグラフについて学習していることから、グラフで考察を始める生徒が多いと想定される。</p> <p>T: どのような着眼点で予想したのか、何名かの声を拾う。</p>

<p>展開① 20分</p>	<p>○関数描画ソフトなどを用いて、グラフを確認してみましょう。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・自由に BYOD 端末を用いる。(自力解決 5分) <p>○グラフを調べてみて、どんなことが分かりましたか。</p> <p>S1: 振幅が大きくなっている。</p> <p>S1-2: ②の振幅が一番大きい。</p> <p>S2: ①②④は足す前と比べて周期が変化していない。</p> <p>S2-2: ①②④は平行移動しているようだ。</p> <p>S3: ③だけは 1つの正弦波にならない。</p> <p>S4: ①②④は 1つの正弦波になっている。</p> <p>S5: ①②④は \sin, \cos で角がそろっている。</p> <p>○この授業ではまず、①の $y = \sin x + \cos x$ に焦点を当てて考えましょう。この正弦波はどのような特徴をもっているでしょうか。</p> <p>S6: 周期は変化せず 2π である。</p> <p>S7: 振幅が大きくなっている。</p> <p>S8: $y = \sqrt{2}\sin x$ のグラフが左側に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動しているようだ。</p> <p>S9: $y = \sqrt{2}\cos x$ のグラフが左側に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動しているようだ。</p> <p>S10: これは別の式でも表せるのではないか。</p> <p>S11: $y = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ と同じグラフになる。</p> <p>○その関係式は、果たしてすべての点で成立しているのでしょうか。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・端末を忘れた生徒には周囲の生徒と結果を共有しながら活動するよう指示する。 <p>T: 振幅はいくつになっていますか。</p> <p>T: どのような波形になっていますか。</p> <p>T: これらに共通することは何でしょうか。</p> <p>T: どこを見てそのように考えましたか。</p> <p>T: どこを見てそのように考えましたか。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・角の和で表現したいので、これ以降は \sin での考え方に統一する。 <p>◇イ①(ワークシートの観察・発問に対する反応の観察)</p>
<p>展開② 15分</p>	<p>○ワークシートの裏面の空欄に、これから考えていきたい「新たな問い」をまとめよう。</p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>問い: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ が成り立つことを示すには、どのような方法が考えられるだろうか。</p> </div> <p>○複数の方法で示してみよう。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・どのように示すことができるか、方針を考える。(自力解決 8分) 	<ul style="list-style-type: none"> ・1分ほど時間を設けたあと、左のような問いとして共有できるようまとめる。 ・集団検討に時間を割きたいので、問いの設定には多くの時間をかけないようにする。

S1: 右辺から左辺へ、加法定理を用いて変形している。

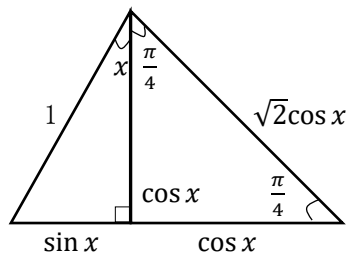
S2: 左辺から右辺へ変形するために $\sqrt{2}$ をくり出している。

S3: $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ と変形し、和積の公式を活用しようとしている。

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= 2 \sin\frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

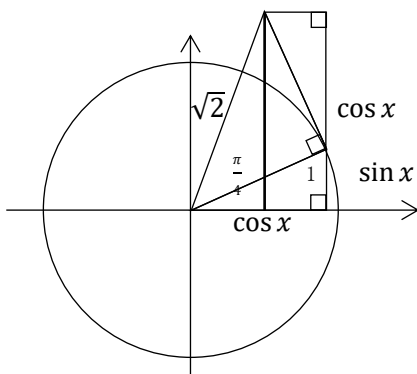
S4: 直角三角形を2つ(斜辺ではない辺を共有させて) 並べることで、正弦定理から

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}$$



S5: 単位円で $x + \frac{\pi}{4}$ の角を作っている。

S5-1: 半径を $\sqrt{2}$ としている。



S5-2: 半径を1としている。

S6: 直角三角形を2つ(斜辺を共有させて) 並べることで、正弦定理・トレミーの定理から

$$1 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

を導こうとしている。

S7: P($\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4}$), Q($\cos x$, $\sin x$) をとり、余弦定理から $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

T1: 左辺からでも変形できるか試してみよう。

T2: 他に図形的アプローチなどで証明する方法はないか試行錯誤してみよう。

T3: $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ は $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ に直せますか。

T4: x が鋭角でない場合は、どのように証明しますか。他の方法も考えてみましょう。

・この図の使い方については、三角比において $\sin 75^\circ$ などを求める活動の中で触れていることから、一定数の生徒は気付くのではないかと想定される。

T5: この図による証明は、 x が鋭角以外の場合でも成り立つでしょうか。

T6: 他にも証明する方法がないか考えてみましょう。

T7: 他にも証明する方法がないか考えてみましょう。

	<p>を導こうとしている。</p> <p>S8:S4において図に示すことまでできている。</p> <p>S9:S5において図に示すことまでできている。</p> <p>S10:分からない。</p> <p>○ここからは、協力しながら進めていこう。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・自分の考えたことを周囲と共有する。(以後、集団検討) <p>○証明の方針が見えたら、自分の言葉でまとめておこう。</p>	<p>T8:この図において$\sin(x + \frac{\pi}{4})$はどうやったら出てくるとおもいますか。</p> <p>T9:この図において$\sin(x + \frac{\pi}{4})$はどこを表しているとおもいますか。</p> <p>T10:式を変形してみたり、三角形を組み合わせしてみたりして試行錯誤してみよう。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・S4, S5 など幾何的に解決しようとしているものを中心に板書させ、思考しながら悩んでいる生徒に発表させる。気付きにくい誤りがあるものを取り上げ、生徒同士の意見交流で解決させたい。 ・時間があればS6について触れる。 <p>T:議論がスムーズに進むようファシリテートしていく。</p> <p>◇イ②(ワークシートの観察・発問に対する反応の観察)</p>
まとめ 5分	<p>○今日の振り返りとして、新たに気付いたことなどをまとめよう。</p> <p>S1:角がそろっているときにまとめられる。</p> <p>S2:いろんな方法で証明できるのは面白い。</p> <p>S3:トレミーの定理は忘れていた。</p> <p>S4:④のように倍角でそろっているものも本当にまとめられるのだろうか。</p> <p>○正弦波1つにまとめられることによさって何だろう。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・何人かの生徒の応答について拾い、コメントする。 ・授業後に探究していく問いとして提示する。(単元のまとめでの解決を想定)

6 評価場面において期待される生徒の姿 (評価規準)

段階 評価の観点 及び評価方法	A	B	C
<p>【思考力・判断力・表現力】</p> <ul style="list-style-type: none"> ・問題解決の過程の取り組み状況により判断(ワークシート) 	<p>関数 $y = \sin x + \cos x$ のグラフが1つの正弦波になることについて複数の方法で考察し、新たな問いを見いだすことができる。</p>	<p>関数 $y = \sin x + \cos x$ のグラフが1つの正弦波になることについて、既習の知識を活用して考察することができる。</p>	<p>関数 $y = \sin x + \cos x$ のグラフを考察したが、示し方について試行錯誤することができない。</p>

7 引用・参考文献

- ・文部科学省「高等学校学習指導要領解説 数学編 (平成30年7月告示)」
- ・数研出版「数学Ⅱ」
- ・国立教育政策研究所「『指導と評価の一体化』のための学習評価に関する参考資料 高等学校数学」