

北海道高等学校「未来を切り拓く資質・能力を育む高校教育推進事業」

令和元年度 授業改善セミナー進学指導講座（数学）

実践発表・ワークショップ②

「主体的・対話的で深い学び」の実現を目指した授業の試み

令和元年 12月9日（月）

11:00-11:45

@北海道釧路湖陵高等学校

北海道室蘭栄高等学校

教諭 桜井俊寛

室蘭栄高校の紹介

(1) 概要

- 創立102年。「文武両道」、「質実剛健」を校是に掲げる地域の伝統ある進学校。
- 全日制は普通科4間口、理数科2間口。理数科は「特進クラス」という位置づけ。
- SSH指定校で現在は第2期の最終年度。現在、3期目の申請に向けて準備中。
- 医進類型指定校で少人数指導のための加配もある。
- 生徒の大多数は室蘭市、登別市、伊達市から通う他、東は白老町、苫小牧市、西は豊浦町、長万部町からも優秀な人材が集まってくる。国公立大学への進学を希望して入学してくる生徒がほとんどで、過去5年の卒業生の国公立大学合格は次の通り。

年度	平成30年度	平成29年度	平成28年度	平成27年度	平成26年度
延合格者数/ 3学年在籍数	151/235 (64.3%)	143/227 (63.0%)	122/229 (53.3%)	118/232 (50.9%)	119/234 (50.9%)
東大・京大 医学部医学科	1・1 1	0・2 2	1・0 2	0・1 2	1・0 2

- 勉強はもちろん、学校行事や部活動にも頑張る生徒が多い。

(2) 数学科

- 全9名で各学年3名ずつ配置している。学年毎に特色あるクラス展開で授業し、少人数指導、文系理系の選択では担当学年を超えて協力して実施している。

	普通科		理数科	
1年次	2人で2クラスずつ		1人で2クラス	
2年次	2クラス3展開×2 (Sコース×1、Aコース×2)		1人で2クラス	
3年次	文系	理系	文系	理系
	4クラス3展開	4クラス2展開 (S×1、A×1)	2クラス1展開	2クラス2展開 (S×1、A×1)

- 毎朝SHR前の15分間で朝学習を実施。主に、国語、数学、英語の3教科で分担。
- 長期休業期間には、夏期講習、冬期講習、春期講習を実施。1、2年次の9月から翌年2月には月、金の7校時に、演習講習を実施（各クラス10回）。
- 模擬試験の過去問、類題対策、添削指導を実施。

自己紹介

(1) 略歴等

所属	期間等	数学科教諭として
静内農業高校【日高】	期限付 1年	すべてが初めて。数学科は1人だけ・・・
清里高校【オホーツク】	初任校 6年	ほぼ1人。授業者が教えて「わかる」、「できる」授業とアクティブ・ラーニング型授業の模索。
室蘭栄高校(全日)【胆振】	現在 6年目	毎年普通科。「気づき」や「疑問(課題意識)」から始まる学習者による主体的な授業の模索。日々、授業改善・・・。

(2) 最近、授業での関心事と実践で気をつけていること

- 問題の中で、生徒が自ら課題を発見する、課題の必要を感じる工夫
- 生徒が主体の時間（考える、作業する、対話する、ふり返る等）をできるだけ確保すること
- 生徒が話しやすい雰囲気工夫
 - 誤答を拾う（つくる）工夫
- 「判断」を生徒に委ねる
 - ふり返りの時間
- 机間指導での介入と意図指名
 - ぐるぐるの図（特に左側）

0 はじめに

あなたが考える「良い授業」とは、どのようなものですか。また、その理由を教えてください。

1 実践事例

同じ問題でも、授業者の問いかけ方が変われば「主体的・対話的で深い学び」の場面をつくれるものです。その実現を目指した授業の試みを紹介します。

(1) 「1次不等式の解法」で誤答

問 $5x + 8 > 11 + 2\sqrt{7}x$ を解け。

解答の例として次のように板書し（可能であれば、生徒の思考から拾ったり、あえて誤りを指摘せずに答案を書いてもらったりし）、「これでいいですか？」と発問してみます。

$$\begin{array}{lll} 5x - 2\sqrt{7}x > 11 - 8 & x > \frac{3}{5 - 2\sqrt{7}} \times \frac{5 + 2\sqrt{7}}{5 + 2\sqrt{7}} & \text{よって } x > -5 - 2\sqrt{7} \\ (5 - 2\sqrt{7})x > 3 & x > -(5 + 2\sqrt{7}) & \\ x > \frac{3}{5 - 2\sqrt{7}} & & \end{array}$$

さらに生徒の理解やでき具合の状況に応じて、「どこが誤りなのか。」「正しい解答はどのようになるのか。」「なぜこのような誤りが出てしまうのか。」「間違いを防ぐにはどうしたらよいか。」のように疑問を掘り下げてみます。

(2) 「2次関数の最小値の場合分け」で課題を発見

問 2次関数 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値を求めよ。

問の共通理解を図るため、平方完成により $y = (x - a)^2 + 1$ となることから、グラフの軸 $x = a$ が変化するということを認識します。

このとき、生徒から「定義域 $0 \leq x \leq 2$ における最小値を1つに決められるのだろうか」という課題が出る（場合分けの必要を感じる）ことが予想されます。

そこで本時のねらい「グラフの軸が変化すると、最小値はどうなるだろうか。グラフの変化を考察して調べてみよう。」を明確にし、学習活動を促していきます。

(3) 「反復試行の確率」で意図指名

問 1個のさいころを5回投げるとき、2以下の目がちょうど3回出る確率を求めよ。

問の共通理解を図るため、2以下の目が出る事象を○、3以上の目が出る事象を×と表して、生徒から2つ、3つの例を引き出します。そこからは自由に考えてもらい、気づきや計算の工夫をまとめていきます。机間指導の際に生徒の思考を読み取り、あえて ${}_n C_r$ を使わない解答を指名して取り上げます。

S1 場合分けを調べつくして和を求める解答

S2 ○、○、○、×、×を並べる順列と考えて、

場合分けが $\frac{5!}{3! \times 2!}$ 通りあるので、

確率は $\frac{5!}{3! \times 2!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$ とした解答

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
○	○	○	×	×
○	○	×	○	×
○	○	×	×	○
		⋮		

S3 5回のうち○が入る3回を選ぶ組合せと考えて、場合分けが ${}_5 C_3$ 通りあるので、

確率は ${}_5 C_3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$ とした解答

【雑感】 反復試行の公式(?)は思考停止の危険アリ?

反復試行の確率と言えば、教科書や参考書にはS3の考え方が公式のように紹介されています。

問に慣れてきた生徒の中には、反射的に「 ${}_n C_r \times \dots$ 」と書き出す者もよく見かけます。

しかし、次のような応用的な問題を考えるときはどうでしょう。

問 赤球1個、白球2個、青球3個が入った袋から、1個を取り出して色を確認してから元に戻す。この操作6回くり返したときに、それぞれの色の球が2回ずつ出る確率を求めよ。

実はS2のような思考の方が汎用性があるように思えます。逆に、この問の場合分けを組合せを用いて何通りあるか考えるには、どうしたら良いでしょうか。そのようなことを生徒が主体的に考え出すと素敵だなと思います。

いずれにしても、「なぜこのように考えると良いのか」を突き詰めることが「思考力を身に付ける」ということのひとつだと思います。

(4) 「正弦定理・余弦定理等」で思考・判断を委ねる

正弦定理、余弦定理が成り立つことを簡潔に説明し、三角形の辺の長さや、角の大きさ、外接円の半径を求める例を紹介します。定理の使い方を見せたところで、生徒に「どんなときに使えるのか」の判断基準を考えてもらいます。

また、次の問においては、解決までにいくつかの手順が必要です。

問 3辺の長さが $a=3$ 、 $b=7$ 、 $c=8$ である $\triangle ABC$ の内接円の半径 r を求めよ。

このような問は「解決までの筋道をどのように立てるか」が課題となります。生徒はこれまで考えた各定理等の判断基準を踏まえて、筋道を立てるために思考・判断を巡らせます。

2 演習

次の問を通して、「主体的・対話的で深い学び」の実現を目指した授業を試みることにしました。
あなただったら、どのように授業しますか。また、そのポイントを教えてください。

(1) 「三角比の相互関係」で

問 $\tan\theta = -2$ のとき、 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ の値を求めよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

(2) 「2次方程式の解の存在範囲」で

問 2次方程式 $x^2 + 2kx - k + 2 = 0$ が1より大きい異なる2つの解を持つときような定数 k の値の範囲を求めよ。

3 「主體的・対話的で深い学び」を考查でも（実践事例）

9 「 $1 < x < 3$ のとき $\sqrt{x^2} - \sqrt{(x-3)^2}$ を x の整式で表しなさい。」という問題を太郎さんは次のように解きました。

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{(x-3)^2} = x - (x-3) = 3$$

よって、 x の値に関係なく、3となります。

と答えたところ、花子さんから、間違いを指摘されました。太郎さんの解答の間違いを指摘し、正しい答えを解答しなさい。【6点】

7 ある日の放課後、太郎さんと花子さんは数学の宿題にあった問題の解き方について会話しした。

宿題： a は定数とする。 x の2次方程式 $x^2 + 2ax - a + 2 = 0$ の異なる2つの実数解が、ともに1より大きくなるような、定数 a の値の範囲を求めよ。

以下の2人の会話を読んで、次の問いに答えよ。【(1) 4点、(2) 6点、(3) 10点】

太郎: まず、授業では2次関数 $y = x^2 + 2ax - a + 2$ のグラフを用いて考えたよね。問題の条件を満たすようなグラフの概形を描いてみると… ア。

花子: 「異なる2つの実数解をもつ」ということは「グラフと x 軸が異なる2点で交わる」ってことだったから、判別式 D を用いると…。ほら、 a の条件を1つ決められたよ。他にどんな条件が必要だったかなあ…。

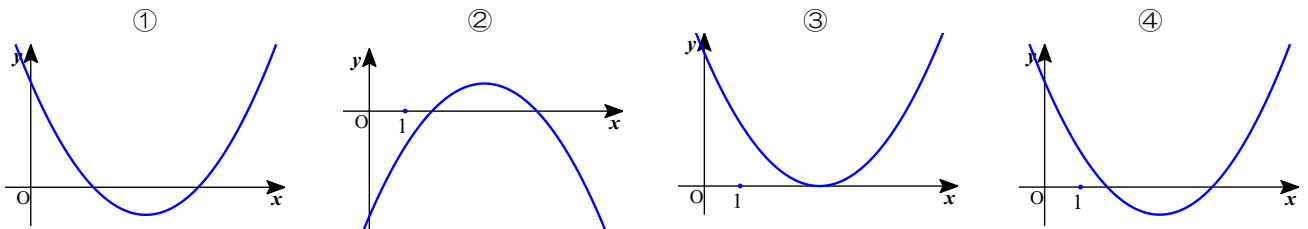
太郎: さっきのグラフから「グラフの軸が1より大きい」という条件も決められる。ここまではいつも大丈夫なんだけど、あとはどうするんだっけ…。

花子: もう1つ、「 y 切片が正」という条件も必要なんじゃない？

太郎: それが「 y 切片が正」でもダメなこともあるんだよ。例えば、こんな図 イ のときは…

花子: あ、本当だ。じゃあ、間違っていたところを直して解答を作り直してみよう。

(1) ア にあてはまるものとして、最も適切な図を次の①から④の中から1つ選べ。



(2) 2人の会話から、イ にあてはまる図を描き、「 y 切片が正」という条件が誤りであることを指摘せよ。

(3) 2人の会話で述べられた条件を基に、間違っていたところを直し、この宿題の解答を記述せよ。※答のみは不可

- ⑤ ある日の放課後、太郎さんと花子さんは宿題の問にあった2次不等式「 $x^2 \geq 8x - 20$ 」の解き方について会話をしました。2人の会話を読んで、次の問いに答えてください。【(1) 2点、(2) 3点、(3) 5点】

太郎：今まで見た問題は「 $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ 」のようになっていたけど、これはどうやって解いたらいいのかなあ…。

花子：これまでと同じような形だったら解けるんだから、**ア**としたらいいんじゃない？

太郎：そうか、これだったら「 $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ 」と同じような不等式になるから解けそうだね。左辺は整数の係数や定数では因数分解できそうにないから、解の公式を使ってみよう。

花子：ちょっと待って。 x の係数に着目すると偶数だから、 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ じゃなくて、これを变形した**イ**を用いた方がいいと思う。

太郎：そうだね。これを使って計算してみると……あれっ？ルートの中の値が負になったよ。どう考えたらいいんだっけ……

花子：ルートの中が負ということは、つまり判別式が負になるんだから「実数解なし」になるんじゃない？

太郎：本当にそうかなあ？先生は授業で「2次不等式を解くときは2次関数のグラフを利用しよう」って言ってたよ。作図をして解を求めてみると…**ウ**

- (1) 2次不等式「 $x^2 \geq 8x - 20$ 」を变形して**ア**にあてはまるものを書いてください。
 (2) 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式について**イ**にあてはまるものを書いてください。
 (3) 太郎さんの考えをもとに、**ウ**に作図し、解答の続きを記述してください。※答のみは不可とします。

- ④ ある日の放課後、太郎さんと花子さんは先生に出題された1次不定方程式の問について会話をしました。2人の会話を読んで、次の問いに答えてください。【(1) 2点、(2) 3点、(3) 5点】

問 次の1次不定方程式のうち、1次不定方程式を満たす整数 x 、 y の組が存在するものを選び。

① $6x + 9y = 1$

② $6x + 9y = 2$

③ $6x + 9y = 3$

花子：え？どうということ？ a 、 b 、 c が整数のとき、「 a 、 b が**ア**ならば、 $ax + by = c$ を満たす整数 x 、 y が存在する。」って習ったよ。どの方程式も $a = 6$ 、 $b = 9$ で**ア**でないから、答を選べないんじゃない？

太郎：ちょっと待って、「1次不定方程式は、1組の整数解を見つけると、すべての整数解を求められる。」とも習ったよ。③の x 、 y には、 $x = -4$ 、 $y = 3$ を代入すると方程式が成り立つから、③は答になるんじゃない？

花子：あっ！本当だ！じゃあ、①や②にも整数解があるかもしれないね。

太郎：じゃあ、①から調べてみよう。……。これは、 $3(2x + 3y) = 1$ と変形できるけど、何がわかるのかな？

花子：左辺と右辺を見比べてみると、**イ**ということが言えるから……。つまり、これを満たす整数 x 、 y の組は存在しないってことね。

太郎：そうか！じゃあ、同様に示せば、②も整数 x 、 y の組は存在しないね。

花子：でも、なんで③に整数解が存在するのかなあ…

- (1) **ア**にあてはまる適切な言葉を書け。
 (2) **イ**にあてはまる適切な説明を述べよ。
 (3) 太郎さんと花子さんの会話に出てきた考えをもとに、③に整数解が存在する理由を述べよ。また、③のすべての整数解を求めよ（答のみは不可とします）。