

高等学校数学科学習指導案

日 時 令和5年10月12日(木)
 第3校時 10:50~11:40
 対 象 普通科3年(15名)
 学校名 北海道旭川永嶺高等学校
 授業者 教諭 松 田 哲
 場 所 1階数学教室

1 単元名

数学Ⅲ 微分法のまとめ

教科書：東京書籍 数学Ⅲ Advanced 副教材：チャート式 解法と演習 数学Ⅲ
 PRIME 数学Ⅲ

2 単元の目標と評価規準

(1) 単元の目標

- ・微分法についての概念や原理・法則を体系的に理解するとともに、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付ける。 【知識及び技能】
- ・関数関係をより深く捉えて事象を的確に表現し、数学的に考察したりする力、いろいろな関数の局所的な性質や大域的な性質に着目し、事象を数学的に考察したり、問題解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察したりする力を養う。 【思考力、判断力、表現力等】
- ・微分法について数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度、粘り強く柔軟に考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度、問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う。

【学びに向かう力、人間性等】

(2) 単元の評価規準

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
① いろいろな曲線について、条件に応じて導関数を用いたり、定数分離や置き換え等の工夫をしたり、微分法の既習事項を活用したりすることで、定数の値の範囲や、接線の本数、最大値や最小値について求めることができる。	① 関数の局所的な変化や大域的な変化に着目し、事象を数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。	① 事象を微分法の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを積極的に活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。 ② 問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。

3 指導にあたって

(1) 教材観

微分法は、物理学の研究からできた学問であり、量の変化に関わる学問である。特に、数学Ⅲの微分法は、局所的な変化を微分係数で捉えることと、大域的な性質として関数のグラフについて理解できることが大きなテーマの一つである。今回の単元は、「微分法のまとめ」として新たに設定した単元である。5時間という少ない単元ではあるが、単なる受験対策ではなく、生徒が数学的な見方・考え方を働かせて深く思考することができる問題を扱っている。極値をもつ条件を導関数の符号の変化から読み解き、接線の本数で定数分離の考え方を復習することから始め、関数の最大値、最小値の問題では置き換えの工夫など含めた見方や考え方をする問題を取り入れた。最後の小単元では、不等式の成立条件で、「最小値に着目」する見方、「定数分離」の見方、さらには置き換えの工夫から接線に着目する見方など、多様な解法を比較・検討できる問題とした。

(2) 生徒観

例年 25 名ほど選択する科目であるが、今年度は 15 名と少なく、数学に興味・関心が高い生徒が集まった。その中でも、数学教師や工学部、放射線技師などを目指す志の高い生徒がいる。少人数ということもあり、普段から、演習中であっても対話をする姿勢が身に付いており、わからないことをそのままにせず、授業内で生徒同士が話し合い解決する様子が見られる。授業後もわからない内容の質問をする生徒や難しい問題の質問をする生徒などがおり、概ね数学に向き合う土台はできている。また、受験のテクニックよりも、定理の証明や概念の理解に興味・関心のある生徒が比較的多い。

一方で、数学ⅠⅡⅢの既習事項の基礎的・基本的理解が十分ではない生徒や、見慣れない問いに対して考えることを諦めてしまう生徒も一定数いる。そのため、既習事項の定着に向けた復習や、あらゆるタイプの問題に抵抗感をなくすための演習の工夫などを数学Ⅲの中に取り入れることで、生徒は知識及び技能を組合せながら、学習段階に応じた課題に対して、少しずつ粘り強く考察することができるようになってきている。

(3) 指導観

微分法や積分法は、その内容の難しさから、演習時間に重きを置いてしまいがちであるが、基礎的・基本的な内容における概念の十分な理解や数学的な見方・考え方を働かせて、見通しを持って考察することができるように、演習中心の指導に偏ることのないように留意している。具体的には、導関数の定義から導関数を求めることや微分可能性など極限の考えを重視することや、三角関数の導関数を定義から導く際に、数学Ⅱで習った加法定理や弧度の性質を利用したり、相互関係を利用したりして証明することなど、生徒が多様な見方・考え方ができるように指導を工夫している。また、既習内容の関連事項をできるだけ丁寧に復習し、新しい内容と結びつけられるような授業を実施したりすることも意識している。さらに、主体的・対話的で深い学びの実現のために、毎授業で生徒が自らの考察の過程等を板書し、説明・議論、発表することなど、習慣化して実施してきた。

本単元では、微分法のまとめとして、数学Ⅱの既習事項と関連付けて、ICTを活用することで感覚的な理解を促し、接線やグラフに着目する問いの中で、数学的な見方・考え方を働かせて、論理的に考察することができる授業展開としたい。

4 単元の指導と評価の計画

(1) 単元の計画（5時間）

小単元等	授業時間数	
1 極値の存在条件	1時間	合計5時間
2 接線の本数	1時間	
3 関数の最大・最小	1時間	
4 不等式の成立条件	2時間	

※各授業時間の指導のねらい、生徒の学習活動、重点及び評価方法等は次の表のとおりである。

(2) 上記の小単元を記載

次	ねらい・学習活動	重点	記録	備考 <評価規準(評価方法)>
1	・極値をもつための条件を調べるために、導関数の増減表をつくることで符号に着目し、考察することができるようにする。	思 態		思① 態① (ワークシート)
2	・接線の本数が、方程式の解の個数と一致することがあることを理解できるようにする。 ・定数分離を利用しグラフを考察することを通して、問題を解決できるようにする。	知 思	○ ○	知① 思① (ワークシート)
3	定義域に文字がある場合の最大、最小の問題について、置き換えなど式の工夫の良さに触れ、解法の比較ができるようにする。	思		思① (ワークシート)
【本時】 4	・不等式の成立条件について、既習内容の結びつきを意識して多様な解法を比較・検討することができるようにする。 ・解法の比較を通して数学のよさに触れ、より良い解法を探究しようとしている。	思 態	○ ○	思① 態① (ワークシート)
5	小単元の問題解決の過程を振り返り、定数分離や置き換えを利用し、改めて問題を解決する方策について振り返ることができるようにする。	態		態② (ワークシート)

知：「知識・技能」 思：「思考・判断・表現」 態：「主体的に学習に取り組む態度」

5 本時の展開

(1) ねらい

- ・不等式の成立条件について、既習内容の結びつきを意識して多様な解法を比較・検討することができる。
【思考・判断・表現】
- ・解法の比較を通して数学のよさに触れ、より良い解法を探究しようとする。
【主体的に学習に取り組む態度】

(2) 展開

時間	学習内容・学習活動	指導上の留意事項
	○ 質問・発問・指示 S 生徒の反応 ・ 学習活動	・ 留意点 T 教師の手立て ◇ 評価規準(評価方法)
導入 7分	○今日はまず、2つのグラフ $y = \sqrt{x}$ と $y = a \log x$ をGeogebraを利用して大小比較してわかることを確認します。 S1：aが負のときは、交点がある。	T：前方のテレビ画面で2つのグラフの様子をスライダーを動かして見せる。 T1～3：aが負、0、0から1.3・・・、大きい値のときのグラフの関係を見せる。

	<p>S2 : aが0のときは、$y = \sqrt{x}$のみになる。</p> <p>S3 : aが0から1.3・・・のときに$y = \sqrt{x}$の方が上にある。</p> <p>S4 : 接するときはあるか。</p> <p>○本時の問いを確認します。</p>	<p>T4 : 接するときを見せ、共通接点が存在するならば共通接線があることに触れ既習内容と関連させる。再び交わるかについても問いかけ、拡大して感覚的に交わりがないことを確認させる。</p> <ul style="list-style-type: none"> 生徒が気づいた事項を板書しておく。 <p>・ワークシートを配付する。ワークシートにあるねらいを確認する。</p>
<p>すべての正の数 x に対して、不等式 $\sqrt{x} > a \log x$ ($x > 0$) が成り立つような a の値の範囲を求めよ。</p>		
	<p>○問いの式はグラフの位置関係でいうとどのような関係であるか。</p> <p>S1 : $y = \sqrt{x}$ が $y = a \log x$ の上にあるときである。</p> <p>S2 : aの範囲は0以上1.3・・・だと予想できる。</p>	<p>T1～2 : グラフの位置関係をテレビ画面で確認する。ワークシートに2つのグラフの関係でわかったことを記入させる。</p>
<p>展開 ① 7分</p>	<p>○それでは、実際にaの範囲を求めるにはどのようにしたらよいか。既習内容に関連して多様な視点で考えよう。</p> <p>S1 : 大きい方から小さい方を引いて正であることをいえばよい。</p> <p>S2 : 不等式だからグラフで考えるとよい。</p> <p>S3 : 先の説明にあったように接線の考え方で解けるだろうか。</p> <p>S4 : 定数aがあるのでどうしたらよいか。</p> <p>S5 : 定数分離はどうだろうか。</p> <p>S6 : わからない。</p>	<p>T1～2 : 不等式であるから2数の差のグラフの最小値に着目することを再確認し、簡単に板書する。</p> <p>T3 : 共通接線を求めるようにやれるのではないかと誘導していく。また、置き換えの工夫をしてみてもおもしろいことを簡単に説明する。これらも簡単に板書する。</p> <p>T4～5 : 定数aに着目して分離する発想が出ない場合は、既習内容でどのような学びをしたのか問いかけ、定数分離に誘導し、方針を板書する。</p> <p>T6 : 既習内容で何を学んだか前時までのプリントを確認させる。わからない場合はこちらから解法を提案する。</p> <p>◇【思】不等式の成立条件について、既習内容の結びつきを意識して多様な解法を比較・検討することができる。</p>
<p>展開 ② 16分</p>	<p>○思いついた方針で解いてみよう。</p> <ul style="list-style-type: none"> グラフの最小値に着目して解く生徒 <p>S1 : $f(x) = \sqrt{x} - a \log x$ を微分すると、 $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2a}{2x}$ である。</p> <p>S2 : 予想からaが負のときは、不成立である。</p> <p>S3 : aが0のときは、グラフから成立する。</p> <p>S4 : aが正のとき、最小値が正である条件を調べればよい。</p> <p>S5 : 増減表がかけません。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 同じ方針を選択した生徒間で積極的に対話するように促す。 <p>T1 : 導関数の通分で手間取る生徒には、声掛けをする。</p> <p>T2～4 : 最小値に着目した場合は、aが負である場合の解答が難しいため、予想からaが負のときは不成立であることを認める。aが0のときも、グラフからわかるので、aが正のときについて考えさせる。</p> <p>T5 : 増減表の作成に手間取っている生徒には、$y = \sqrt{x} - 2a$のグラフから増減を考えさせる。</p>

	<p>・定数分離を利用して解く生徒 S1: $\log x$ で割った際の不等号の向きが変わることに注意したらよいが、その際の x の範囲がわからない。</p> <p>S2: 定数分離後の関数 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\log x}$ のグラフをかいて直線 $y = a$ との比較をすればよい。</p> <p>S3: グラフを書くことが少し難しい。</p> <p>・接線を引いて比較しようとする生徒 S1: 接点を置いて共通接線を求める。 S2: 接点が求まり、そのときの a の値はわかったが、つまりどういうことなのかわからない。</p> <p>・置き換え後に接線に着目する生徒 S1: 指数関数 $y = e^x$ と直線 $y = at$ との比較になる。 S2: a の値の変化に着目して、2つのグラフが接するときまでを求めればよい。</p>	<p>・最終的には最小値 $f(4a^2) > 0$ に気づけるよう誘導する。微分で増減表が書けない場合は、Geogebra の関数ソフトを利用させる。</p> <p>T1: 定数分離に着目した場合、$\log x$ で両辺を割る際に注意すべきことに触れる。x の範囲気づかない場合は誘導する。</p> <p>T2: 場合分けはするが、書くグラフは1つであることを確認する。</p> <p>T3: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\log x}$ のグラフは書くのに少し時間がかかるため、関数の極限を与えること $x = 1$ が漸近線になることは様子を見て伝える。計算についても随時支援する。微分でグラフが書けない場合は、Geogebra の関数ソフトを利用させる。</p> <p>T1: そのまま解かせる。 T2: 初めに提示した2つのグラフを Geogebra で描かせ、a の値が増加したときのグラフの動きを確認させ、a の範囲を求めさせる。</p> <p>T1~2: わからない場合は2つのグラフを Geogebra で描かせ、a の値が増加したときのグラフの動きを確認させ、a の範囲を求めさせる。</p>
<p>展開 ③ 15分</p>	<p>○生徒が解いた複数の方針の解答を比較します。</p> <p>・グラフの最小値に着目して解く生徒 ・定数分離を利用して解く生徒 ・接線を引いて比較しようとする生徒</p> <p>○複数の解法について、各々の解法の良さはどのような点でしょうか。また、この問いに対してはどの解法が個人として良いと思うか。</p> <p>S1: 不等式だから、差をとると考えたが意外と計算が大変であった。</p> <p>S2: 定数分離が有名だからそう解いたがグラフが難しく時間が掛かりそうだった。</p> <p>S3: 接線を引いて考える方法もあることを知った。</p> <p>S4: 置き換えすることは気づけなかったが、解法としては美しかった。</p>	<p>・各々の解き方で代表をきめ、写真を撮り、テレビ画面で解法を確認する。解ききれていない場合は、プリントをみて補足する。</p> <p>・上記4つの解答プリントを配付する。</p> <p>T: 正しい答案も含め各々の解法を比較するよう促す。</p> <p>T1~4: 簡単に解ける方法が良い方法ではなく、数学的にどれもおもしろい解き方で、個人にあった解き方は何か、複数の解法で解ける見方の美しさを伝える。</p>

まとめ 5分	○本時のねらいについて、振り返ろう。	T：ワークシートの振り返り欄にねらいに即したまとめを記入させる。 ◇【思】不等式の成立条件について、既習内容の結びつきを意識して多様な解法を比較・検討することができる。 ◇【態】解法の比較を通して数学のよさに触れ、より良い解法を探究しようとする。
-----------	--------------------	---

6 評価場面において期待される生徒の姿（評価規準）

段階 評価の観点 及び評価方法	A	B	C
【思考・判断・表現】 ・問題を思考する過程の取り組み状況とワークシートにより判断	・不等式の成立条件について、差をとった関数の最小値に着目する、定数分離をする、接線に着目するなど既習内容と結び付けて、多様な解法の比較・検討ができる。	・既習内容と結び付けて解法を考えることができる	・多様な解法を考える力が十分でない。
【主体的に学習に取り組む態度】 ・ワークシートにより判断	・解法の比較を通して数学のよさに触れ、より良い解法を探究しようとする。	・解法の比較を通して数学のよさに触れ、解法を考えようとする。	・解法のよさに気づけず、解法を比較する姿勢・態度が十分でない。

7 （参考）本単元で扱う題材

(1) 1時間目で扱う題材

関数 $f(x) = \frac{1}{x} - e^{-ax}$ が $x > 0$ において 2 つの極値をもつとき、定数 a のとり得る値の範囲を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ である。 (東京電機大)

(2) 2時間目で扱う題材

a を 0 でない実数とする。2 つの曲線 $y = e^x$ および $y = ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ。 (東北大学)

(3) 3時間目で扱う題材

a を正の定数とする。関数 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ の区間 $0 \leq x \leq a$ における最大値と最小値を求めよ。

(4) 4時間目で扱う題材

すべての正の数 x に対して、不等式 $\sqrt{x} > a \log x$ ($x > 0$) が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

(5) 5時間目で扱う題材

x の関数 $(1 - \frac{a}{2} \cos^2 x) \sin x$ の最大値が 1 となるような a の値の範囲を求めよ。 (東京工業大)

8 引用・参考文献

- ・文部科学省「高等学校学習指導要領解説 数学編 (平成 30 年 7 月告示)」
- ・国立教育政策研究所「『指導と評価の一体化』のための学習評価に関する参考資料 高等学校数学」
- ・数研出版「改訂版 高等学校 数学Ⅲ 教授資料」
- ・東京出版「大学への数学 解法の探求・微分積分」
- ・旺文社「数学Ⅲ 標準問題精講」