高等学校数学科学習指導案

日　時　令和４年 10 月 25 日(火)
第５校時 13:30～14:20
対　象　総合学科３年(30 名)
学校名　北海道旭川南高等学校
授業者　教諭　石　川　博　之
場　所　２Ｂ講義室

1　単元名

「『微分法』の活用法のまとめ」
（教科書：数研出版　改訂版　高等学校　数学Ⅲ、副教材：study-up ノート）

2　単元の目標と評価規準

(1) 単元の目標

・様々な課題について、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする際に微分法を活用できる技能を身に付ける。【知識及び技能】
・微分法を活用して、他単元や既習事項との関連を考察し、発展的に活用する力を身に付ける。【思考力、判断力、表現力等】
・微分法において、有用性やよさを認識し積極的に活用しようとする態度、粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度、問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとする態度を身に付ける。【学びに向かう力、人間性等】

(2)単元の評価の観点の趣旨・観点別の評価規準

	ア 知識・技能	イ 思考・判断・表現	ウ 主体的に学習に取り組む態度
単元の評価の観点の趣旨	・微分法の発展的な内容について、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付けている。	・微分法を活用して、他単元や既習事項との関連を考察し、発展的に活用する力を身に付けている。	・微分法において、有用性やよさを認識し積極的に活用しようとしたり、粘り強く柔軟に考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。 ・問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善しようとしたりしている。
学習活動に即した具体的な評価規準	①導関数を用いて、接線の方程式、関数の値の増減などからグラフの概形をかいたりすることができる。	①関数の変化に着目し、事象を数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。	①事象を微分法の考えを用いて考察する有用性やよさを認識し、問題解決にそれらを積極的に活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。 ②問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。

３　指導にあたって

(1) 教材観

「数学Ⅲ」は、「数学Ⅱ」の履修後に数学に強い興味や関心をもってさらに深く学習しようとする生徒や、将来、数学が必要な専門分野に進もうとする生徒が履修する科目ではあるが、その内容の高度さ、複雑さ、日常生活と結び付けることが容易ではない抽象性のため、技能が習得できると満足してしまう科目であると感じている。しかしながら、高校数学を学ぶ以上、数学Ⅲでの思考こそが、数学的な見方・考え方を一層豊かにするものと考える。したがって、数学Ⅲの特殊なイメージを払拭するため、この「微分法の活用法のまとめ」という単元では、数学Ⅱの「微分の考え」と数学Ⅲ「微分法」で共通している数学的な思考や、数学Ⅱの「微分の考え」のみでは不足している部分を補う発展的な思考に重点を置いている。微分を活用した応用的事項を主体的に学習できるような題材を扱い、課題解決の過程で考察を深めたり、論理的に考察したりする時間となるようにしたい。短い単元ではあるが、単元に微分の活用というテーマを設定し、単元全体で目標を達成できるように留意する。

(2) 生徒観

本科目は理系の生徒の受験や、進学後に必要のある生徒が選択する科目である。例年、20 名程度の選択であるが、本年度は選択者が 30 名と非常に多くなっている。その要因として、生徒の進路希望もあるが、１・２年次における数学科の丁寧な指導が挙げられる。数学に苦手意識を持たずに数学ⅠⅡＡＢまで学習してきた生徒が多いと感じる。中には、高度な数学を進路選択のためには不要の生徒もいるが、そのような生徒も意欲を失っておらず、概ね数学を学習することへの関心・意欲は高い。また、これまでの指導者のおかげで演習中の対話的に学ぶ姿勢が確立されている。したがって、学びの中で新たな疑問（問い）を生徒自身が持つことがある。具体的には、べき乗の微分について指数が整数の時でも成立つことを確認した際、有理数・実数の時はどうなるのか疑問が表出していた。また、微分法の応用では第２次導関数とグラフの凹凸を考える際、第１次導関数との関係を考察しようとするなどしていた。教科書の演習などでも対話的に解決していく場面が多く見られる。

一方で、他の事象と関連付けて発展的に考察したり、論理的に考察したりする部分はまだ課題がある。直前の単元との結びつきや、関連は生かすことは比較的できる方であるが、十分とはいえない。特に、数学Ⅲ以外の単元での学びには中々結びつかない。数学Ⅲの「微分法」の学びを関連付けた本単元の題材を通して、生徒に、既習内容を踏まえて考察を深めたり、微分法を活用して論理的に考察したりする力を身に付けたい。

(3) 指導観

単元「微分法」では、微分可能性や関数の和、差、積及び商の導関数、合成関数の導関数を求めること、三角関数、指数関数及び対数関数の導関数を求めること、導関数を用いることで、グラフの概形をかいたりすることなど、一通りの基本的な概念や原理・法則は、単なる暗記に陥らないように、留意しながら指導してきた。また、関数の局所的性質や大局的性質について理解を深めるために、生徒の理解度によってはコンピュータなどを活用しながら進めてきた。本単元では、既習事項の振り返りとしてだけではなく、数学Ⅱなどの他の科目で履修した内容との継続性・連続性を意識して指導を行う。指導の際は、対話的・協働的な学びを心掛け、発表や討論により主体的に学習を進めるゼミナールのような授業を展開することを目標としている。生徒の多くは、大学へ進学後さらに発展的な学びへ向かっていき、探究的な学びをまさに体現していくこととなるので、「微分法の活用法のまとめ」を通じてそのような力を育成したい。また、数学Ⅲまで履修した生徒ならではの数学のよさや奥深さを感じられるような展開を心掛ける。

4　単元の指導と評価の計画（計４時間）

次 (時間)	ねらい	学習内容・学習活動	評価規準(評価方法)
1	いろいろな関数のグラフについて微分法を活用して理解できるようにする。	指数関数と三角関数の合成関数のグラフについての考察を通して、グラフのかき方の理解を深める。	イー①（学習プリント）
2	媒介変数表示された曲線のグラフについて微分法を活用して理解できるようにする。	媒介変数表示された曲線について考察することを通して、グラフの対称性を意識しながらかくことを理解する。	アー①（行動観察）
3	微分を活用して、関数の変化に着目したり、既習事項と関連付けたりすることで大小関係の比較ができるようにする。	数の大小関係を比較する際に、微分法を用いることでグラフが単調減少であると見通しを持ち、考察する。	イー①（ノート・Google forms）
4	微分法の活用法のまとめとして総合問題を演習し、本単元で学んだ微分法の良さや有用性を振り返ることができる。	微分法を含んだ総合問題の演習を通して、その問題解決の過程を振り返って学習の成果を実感する。	イー①（学習プリント・発表） ウー①②（学習プリント）

5　本時の展開

（1）ねらい

・微分を活用して、関数の変化に着目したり、既習事項と関連付けたりすることで大小関係の比較ができるようにする。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**【思考・判断・表現】**

（2）展開

時間	学習内容・学習活動 ○ 質問・発問・指示　S 生徒の反応　・ 学習活動	指導上の留意事項 ・ 留意点　T 教師の手立て　◇ 評価規準(評価方法)
導入 ５分	○今日は大小関係の問題を扱います。 ○本日の問いを確認します。	・座席は自由席。座席配置も自由とする。 T：単元の目標である、「関連付け」を意識することを確認。
	「$\frac{\log e}{e}$ 、$\frac{\log \pi}{\pi}$　のどちらが大きいか」ついて、どのように考えればよいだろうか	
展開 ① 35分	○どちらが大きいかを予想してみよう。 S1：$\log e$は１だから片方は$\frac{1}{e}$だ。 S2：$\frac{\log\pi}{\pi}$がうまく計算できない。 S3：単純計算は少々面倒だ。 ○今までどのように大小比較をしていたか？考えられる方法を答えよう。 S1：２数を引いた差と０の大小関係から示す。 S2：関数の単調減少・増加の性質を利用する。 S3：$\log e^{\frac{1}{e}}$ と $\log \pi^{\frac{1}{\pi}}$　を比較する。 S4：わからない。	T：周囲と対話的に学べるように声掛けをする。 ・この段階では、単純な「予想」なので、自由に意見を出させる。 T:大小比較する方法にはどんな方法があるか発言させる。発言がない場合・S4のような生徒が多い場合は、微分を用いた不等式の証明や数Ⅱの既習事項を振り返るよう働きかける。その際、教科書データを画面で提示してもよい。

	○それぞれの方法を検討してみよう。 ・それぞれで検討する。グループ、個人の形態は問わない。 ・以下は生徒の検討状況を見定めながら、進めていく ○机間指導で以下のようなやりとりをするが、最終的に生徒に解答を発表してもらう。 S1：$\frac{\log e}{e} < \frac{\log \pi}{\pi}$ と予想して、$\frac{\log \pi}{\pi} - \frac{\log e}{e}$を考えましたが、ここからわかりません。 S2：$\frac{\log e}{e} < \frac{\log \pi}{\pi}$ と予想して、両辺に$e\pi$をかけました。$\pi < e\log\pi$まではたどり着いたのですが途中でわからなくなりました。 S3：底は $e > 0$だから、$e^{\frac{1}{e}}$ と $\pi^{\frac{1}{\pi}}$ の大小関係を比較することはわかるけど、$\frac{1}{e}$ と$\frac{1}{\pi}$ があるからな。$y = x^{\frac{1}{x}}$ のグラフをかいて確かめたいけど、どうしたらよいのだろう。 S4：$\frac{\log \pi}{\pi} - \frac{\log e}{e}$ から何をしたら良いのかわかりません。	T：でてきた案をＡパターン、Ｂパターンなどと板書し、整理する。 T：全体で各方法の検討が進むように配慮する。グループになってもよい。全体ですべての解答が出そろうように配慮する。 ・生徒の気づきや困り感などを板書することなどより、互いに思考の不足部分を補えるような状況を作り出し、検討が進むようにする。 T:関数を定義するということに気付けない生徒へは単調減少・単調増加の性質を用いた大小比較についての例を示し、関数を定義することに着想させる。 T1:S2、S3 の考え方を共有して、関数を定義することに気づかせる。 T2:定数πを変数として置き換えて、関数を定義するとよいことに気付かせる。 T3:両辺の対数をとって考えることを伝える。 ・T1～T3 は、すぐに結論として伝えずに、生徒の思考の段階を見ながら必要な働きかけをする。 T4：関数の単調減少、単調増加の性質を用いた大小比較についての例を提示し、思考するよう促す。
	○いずれのケースにも、この後に共通する考え方の見通しは何だろうか。 S：関数を定義し、微分することでグラフの増減を確かめること。 S4：わかりません	・板書の比較検討を十分に行うことで、S1～S3 どの方法であっても、共通している考え方が、関数を定義し、微分をして、グラフの増減を確かめることで結論が得られるのではないかという予想をさせる。 T4:S1～S3 の生徒に何をしたか・見通しを話してもらい共通点を探れるようにする。
	○では、見通しを踏まえて実際にやってみよう。 S1：$y = \frac{\log x}{x}$ のグラフをかいて考えた。 $x = e$で極大値となるので、$x > e$ ではグラフは単調減少。$e < \pi$だから$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$だ。 S2：$f(x) = e\log x - x$として、$f(x) > 0$ を示す。 $f'(x) = \frac{e}{x} - 1$となり$x = e$で極大値をもつことまでは確認できたよ。	・それぞれどのような関数を定義したか、途中で確認をする。 ・以下、必要な場面で補助的な発問に心がける。 T1：完全に導けていなくても、方向性がこれに近いものについては、考え方を全体で共有する。 T2、3：グラフをかいた段階で、今何を求めるべ

	S3：$y = x^{\frac{1}{x}}$ のグラフをかいたら、$x = e$で極大値をもつことを確認したよ。$e < \pi$ だから、$e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}}$ が得られたよ。 S4：わかりません。 ○関数を結びつけて考えるときに、気をつけたポイントは何だろう。 S1:$\frac{\log e}{e}$と$\frac{\log \pi}{\pi}$ の、eとe 、πとπ のところを x にしたところかな。 S2: 最初、$\pi < e \log \pi$ と予想したところから考えたから、πとπをx にしたところかな。 S3: $e^{\frac{1}{e}}$ と $\pi^{\frac{1}{\pi}}$ の大小関係を比較することから考えたから、eとe 、πとπ のところを x にしたところかな。	きかについて、わからなくなっているので、最初の問題に立ち返り、何を求めるか再度確認させる。 T2､3､4：グラフがかけない生徒に対しては、どこでつまずいているのか確認する。 T4:微分がやりやすいと思われる S2 の案について説明をし、微分する方向へ誘導する。 ・問いの答えは、こちらから示すのではなく、生徒同士で導き、共有できるようにする。 ・生徒の解法をタブレット端末で写し、前方のモニターへ投影し､生徒に解説をしてもらう。 T1～4：ここでは、生徒の言葉でまとめさせるように留意する。 ・どのように関数と考えるかというポイントを整理させる。それぞれの場合に偶然にできたという考え方ではなく、どの場合でも留意する点に気付かせたい。 ・次時の問いへとつなげるための捉え方である。
展 開 ② ５分	○ $\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$であるという結果から、新たに気づくことはあるかな。 S1：対数のままで考えても、引き算で考えても、指数で考えても結果は一緒だった。 S2：交差してる？なんか、両辺に$e\pi$かけたら、$\pi \log e > e \log \pi$みたいな関係が成り立つ。 S3：さらに、$\log e^{\pi} > \log \pi^{e}$ じゃないの？ S4：$e^{\pi} > \pi^{e}$ になるってことじゃない？	・本時の考察を振り返りながら、気付いたことを自由に発言させる。 ・S4 の気づきへ促したい。 ・さらに、例えば2^3と3^2のように底と指数を入れ替えたものの大小関係はどうなっているかを投げかけて次の課題につなげる。
まとめ ５分	○この時間でポイントになった考え方について、振り返ろう。 次時の課題の確認 太郎さんは $0 < a < b$であるとき、$b^a < a^b$が常に成り立つと考えた。正しいかどうか確認せよ。ただし、理由も書くこと。	・Google classroom で forms によるアンケートを実施する。本日のノートを撮影し、クラスルームに提出する。 ◇【思】微分を活用して、関数の変化に着目したり、既習事項と関連付けたりすることで大小関係の比較ができる。

(3) 評価規準と「おおむね満足できる」状況（Ｂ）と判断される生徒の具体的な姿について

評価規準	評価方法・評価の場面 ※留意点	「おおむね満足できる」状況(B)と判断される生徒の具体的な姿
微分を活用して、関数の変化に着目したり、既習事項と関連付けたりすることで大小関係の比較ができる。	ノート・まとめ５分でクラスルームに提出 ※ノートについては、最後まで記載した後に、写真で撮り、クラスルームに提出させる。	＜ノート＞ 〇パターン１ $\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$ または $\frac{\log e}{e} < \frac{\log \pi}{\pi}$ を予測し、関数 $y = \frac{\log x}{x}$ を活用することに気付き、グラフをかいて考える。さらに、$x = e$ で極大値となるので、$x > e$ ではグラフは単調減少であることを述べて、$e < \pi$ だから $\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$ と結論づける。 〇パターン２ $\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$ または $\frac{\log e}{e} < \frac{\log \pi}{\pi}$ を予想して、両辺に $e\pi$ をかけて、$\pi > e \log \pi$ または $\pi < e \log \pi$ となることから、関数 $f(x) = e \log x - x$ を活用することに気づき、$f(x) > 0$ や $f(x) < 0$ を示すことを考える。さらに、$f'(x) = \frac{e}{x} - 1$ となることから、$x = e$ で極大値をもつので、$x > e$ ではグラフは単調減少であることを述べて、$e < \pi$ だから $\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$ と結論づける。 〇パターン３ $\log e^{\frac{1}{e}}$ と $\log \pi^{\frac{1}{\pi}}$ を比較することに着眼し、底は $e > 0$ だから、$e^{\frac{1}{e}}$ と $\pi^{\frac{1}{\pi}}$ の大小関係を比較することから考える。 関数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ を活用することに気づき、グラフをかくことで、$x = e$ で極大値をもつことを確認し、$e < \pi$ だから、$e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}}$ であること、つまり $\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$ を結論づける。
	Google Forms・まとめ５分で実施 ※「この時間でポイントになった考え方について、振り返ろう。」に対しての自由記述である。	＜Google Forms＞ 大小比較には関数の変化を確かめる方法もあること。その際、グラフをかくために微分法が活用されていることへの気づきがある。

6　（参考）本単元で扱う題材

(1)　1時間目で扱う題材

$y = e^{\sin x + \cos x}$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ のグラフをかけ。

(2) 2時間目で扱う題材

xy平面上に、$x = 2cos2\theta,\ y = 2cos3\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$　と媒介変数表示された曲線Cを考える。

(1) $t = cos\theta$ とおいて、x と y を t の式で表せ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ において、y を x の式で表せ。また、$\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ において、y を x の式で表せ。

(3) 曲線Ｃの概形をかけ。　【2014 佐賀大$\boxed{4}$】

(3) 4時間目で扱う題材

太郎さんは　$0 < a < b$であるとき、$b^a < a^b$が常に成り立つと考えた。正しいかどうか確認せよ。ただし、理由も書くこと。

7　引用・参考文献

・文部科学省「高等学校学習指導要領解説　数学編（平成30年7月告示）」

・数研出版「改訂版　高等学校　数学Ⅲ」　「改訂版　高等学校　数学Ⅱ」

・国立教育政策研究所「『指導と評価の一体化』のための学習評価に関する参考資料　高等学校数学」

・オリジナルスタンダート数学演習Ⅲ