

第 3 学 年 数 学 科 学 習 指 導 案

日 時	令和元年11月21日(木) 2校時 9:40~10:30
対 象	3年数学Ⅲ 4, 5組医進クラス
学校名	北海道旭川東高等学校
授業者	教諭 花尻 健明
場 所	3階多目的教室

1. 単元名 積分の応用

2. 単元について

①題材観

これまで、積分の基本的な計算や積分を用いて面積や体積を求める方法について学習してきた。それらを活用して、極限や定積分をはじめとする様々な単元の考え方を基に複雑な面積や立体の体積を求める方法について色々な角度から考察していきたい。

②生徒観

本校は医進類型指定事業を受けており、その一環で三年生の数学Ⅲ履修者は医進クラスと理型クラスに分かれて授業を行っている。本授業は国公立大学の医学部や難関大学理系学部への進学を考えている生徒が大半を占めている医進クラスである。数学を非常に得意とする生徒が多く在籍しているが、数学が得意な生徒は自分の書いた答えを他者が見てどう思うのか、他の考え方はないのか考えようという視点に欠けている。答えを出すことを主眼に置かせるのではなく、途中の過程をどのように具体化するのか、どのような表現をとるべきか見方や考え方を広げさせる指導が必要であると考えている。

③指導観

数学における思考力を養うためには、抽象的な題材を具体化して考えたり、自分で変数を設定して考えたりするなど、自分で仮説をたてて検証していこうとする態度を育むことが重要である。誘導がついている問題への対応はもちろん重要であるが、誘導にどのようにのっていかという指導に終始していると、生徒の思考する範囲を制限してしまい、試行錯誤する機会を失わせている面もあるのではないかと考えている。本授業では、誘導を意図的に消してなぜその誘導が必要であったかを考えることで、抽象的な題材を具体的に考えるよさや具体から規則性を見つけて一般化させるための見方や考え方を身につけさせたい。また、それらは他の場面にも活用できる汎用的な考え方であることを認識させられる授業展開を目指したい。

3. 単元の指導計画

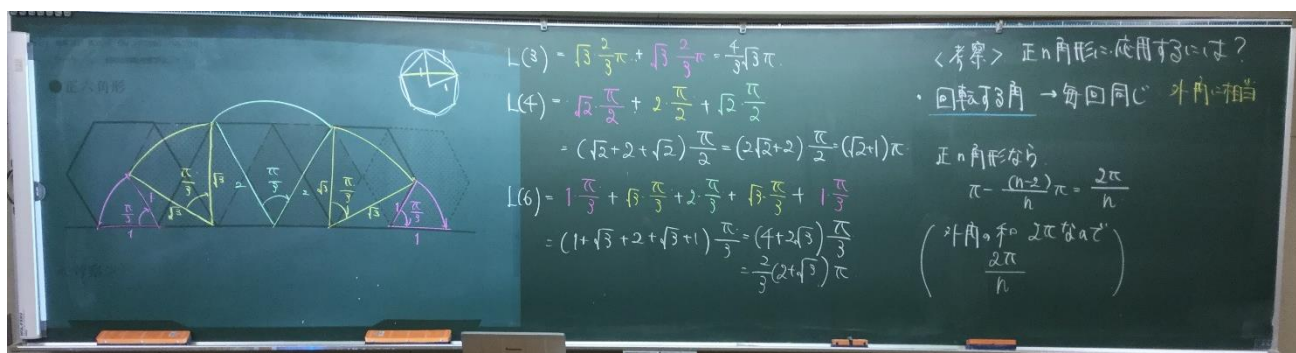
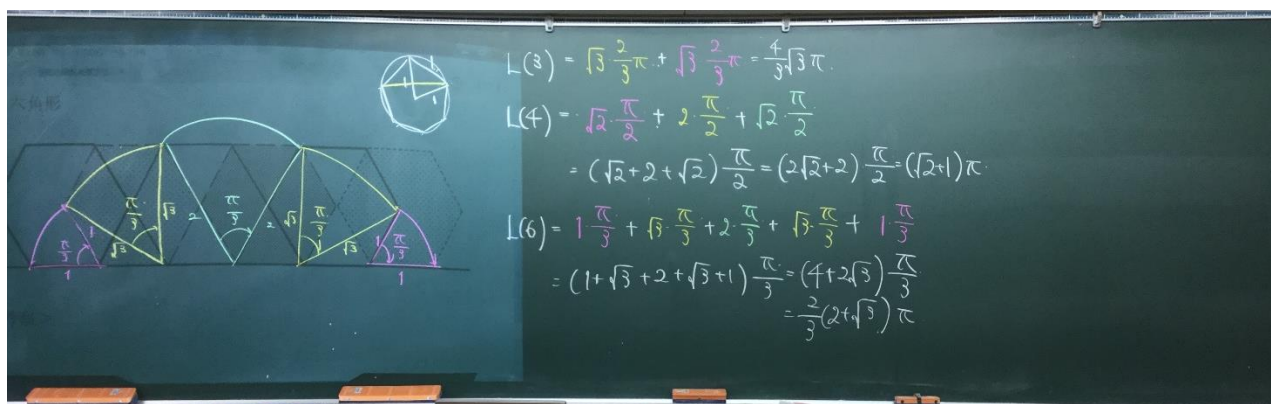
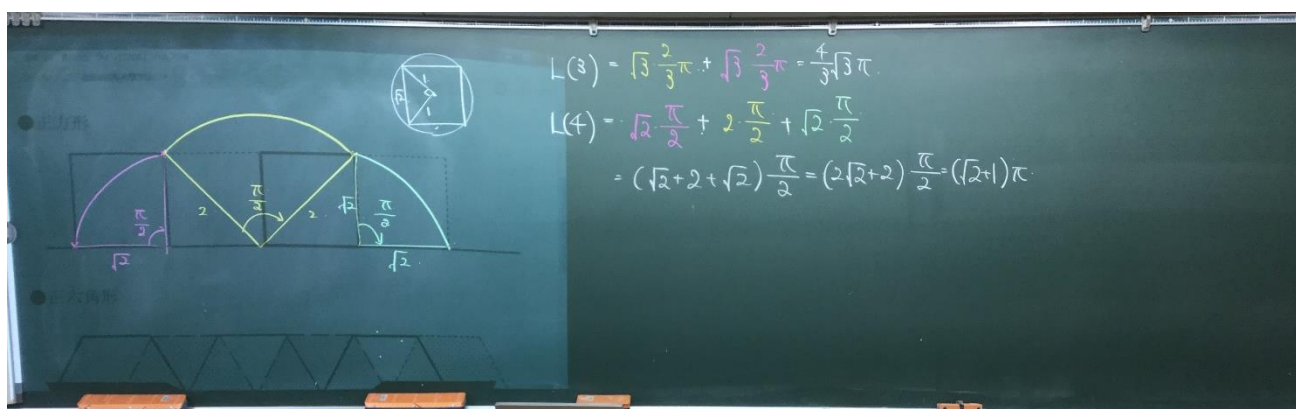
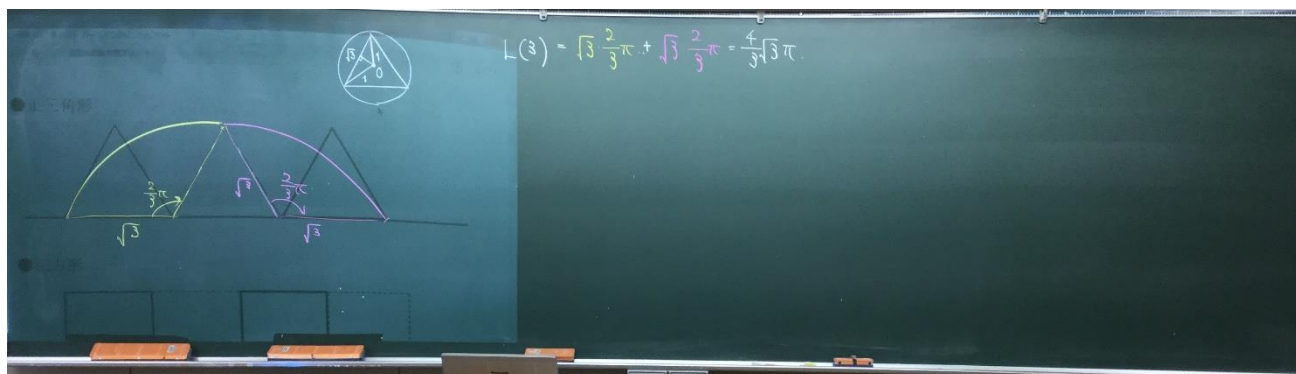
- 第1時 減衰振動曲線で作られる面積とその無限級数
- 第2時 面積を工夫して求める
- 第3時 y軸周りの回転体の体積の応用
- 第4時 区分求積と不等式
- 第5時 区分求積の図形への応用【本時】
- 第6時 円に巻きついた糸をほどくときに作られる面積（伸開線）
- 第7時 サイクロイド曲線で作られる面積の応用

4. 本時案

- (1) 本時の目標 n で表された一般的な事象について、具体的な事例を用いて考察し、それを一般化するにはどうしたらよいか考えることができる。【数学的な見方・考え方】

(2) 本授業案

展開	生徒の学習活動 ○生徒の活動 ◇生徒の反応	指導上の留意点 ●教師の働きかけ ▲評価規準 ◆支援方法
導入 (5)	○本時のねらい・学習内容を確認する。 半径1の円に内接する正n角形がxy平面上にある。1つの辺ABがx軸に含まれている状態から始めて、正n角形をn軸上をすべらないように転がし、再びABがx軸に含まれる状態まで続ける。点Aが描く軌跡の長さ$L(n)$とする。 (1) (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} L(n)$を求めよ。 ○問題文を読む。	●本時のプリント①を配布する。 ●正n角形が動く際には、何に着目すればよいのか投げかけ、本時の見通しを持たせる。
展開 (40)	【発問1】 この問題の(1)にどのような問題を設定すればよいか考えよう。 ○(1)の問いは何か考える。【個人】 ○生徒同士で話し合いを用いながら考える。【ペア】 ◇$n=3,4,5,6 \dots$のときを考えていけばいいことに気づく。 【全体共有】 ○$n=3,4,6$のときのAが描く軌跡の長さを求めさせる。 【発問2】 正n角形での回転を考えるために、$n=3 \sim n=6$における規則的な変化はないか考えよう。 ○どこに着目するかを考える。【個人】 ○生徒同士で話し合いを用いながら考える。【ペア】 ○一般化するために回転の回数、角度、回転している辺の特徴について考える。【個人またはペア】 ○$L(n)$を求める。 ○極限値を区分求積法を用いて答えを出す。	●生徒に発表させ、その意図も答えさせる。 ●コンピュータを用いて回転している様子をみせる。 ●プリント②配布 ●$n=3,4,6$のときAが描く軌跡の長さを求めさせる。 ●生徒に発表させる。 ◆回転の回数、回転の角度、回転している辺の特徴について着目させる。 ●正六角形の動きで確認する。 ▲nで表された一般的な事象について、試行錯誤しながら事象を把握することができる。 【数学的な見方・考え方】 ●(1)の振り返りを行う。 ●(2)に取り組ませる。 ●(2)の解答を行う。
まとめ (5)	○教科書の内容を確認する。 ○nが用いられていても、簡単な具体的な数値で考えて事象を把握することのよさを認識する。	●教科書P266を開かせて、今回の題材はサイクロイドの長さと同じであることを確認させる。 ●本時の振り返りを行う。 ●プリント①を回収する。



正六角形

回転する辺の長さ

正六角形なら
 $\pi - \frac{(n-2)}{n}\pi = \frac{2\pi}{n}$
 (対角線の長さ 2π なぞ)

正六角形なら
 $\pi - \frac{(n-2)}{n}\pi = \frac{2\pi}{n}$
 (対角線の長さ 2π なぞ)

正六角形なら
 $\pi - \frac{(n-2)}{n}\pi = \frac{2\pi}{n}$
 (対角線の長さ 2π なぞ)

正n角形なら

正n角形なら
 $\pi - \frac{(n-2)}{n}\pi = \frac{2\pi}{n}$
 (対角線の長さ 2π なぞ)

正n角形なら
 $\pi - \frac{(n-2)}{n}\pi = \frac{2\pi}{n}$
 (対角線の長さ 2π なぞ)

正n角形なら
 $\pi - \frac{(n-2)}{n}\pi = \frac{2\pi}{n}$
 (対角線の長さ 2π なぞ)

正n角形なら

正n角形なら
 $\pi - \frac{(n-2)}{n}\pi = \frac{2\pi}{n}$
 (対角線の長さ 2π なぞ)

正n角形なら
 $\pi - \frac{(n-2)}{n}\pi = \frac{2\pi}{n}$
 (対角線の長さ 2π なぞ)

正n角形なら
 $\pi - \frac{(n-2)}{n}\pi = \frac{2\pi}{n}$
 (対角線の長さ 2π なぞ)

k回目の回転で、 $\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi k}{n}}$ 、中心角 $\frac{2\pi}{n}$ の円弧を掃くので

$$L(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{2-2\cos\frac{2\pi k}{n}} \cdot \frac{2\pi}{n}$$

よって

$$L(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{2(1-\cos\frac{2\pi k}{n})} \cdot \frac{2\pi}{n}$$

$$L(n) = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{2(1-\cos\frac{2\pi k}{n})}$$

$$L(n) = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{2(1-\cos\frac{2\pi k}{n})}$$

$$L(n) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2(1-\cos 2\pi x)} dx$$

$$\frac{1-\cos 2\pi x}{2} = \sin^2 \pi x$$

$$L(n) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \pi x} dx$$

$$L(n) = 4\pi \int_0^1 |\sin \pi x| dx$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \sin \pi x \geq 0 \text{ かつ } 1$$

$$L(n) = 4\pi \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$L(n) = 4\pi \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1 = 4\pi \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right) = 8$$

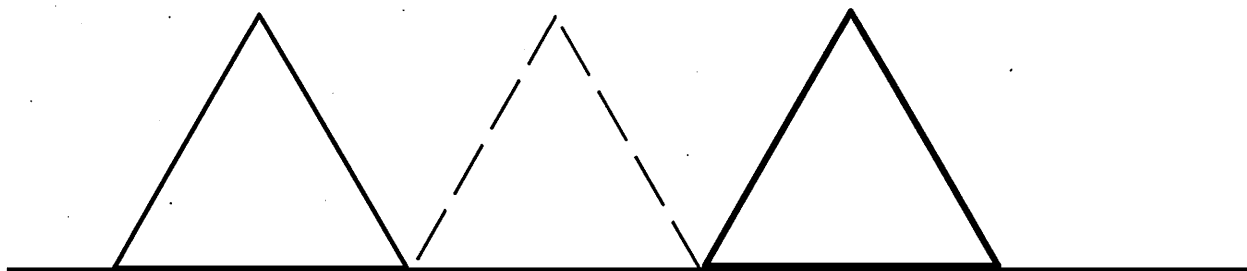
半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある. 1 つの辺 AB が x 軸に含まれている状態から始めて, 正 n 角形を x 軸上をすべらないように転がし, 再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける. 点 A が描く軌跡の長さを $L(n)$ とする.

(1)

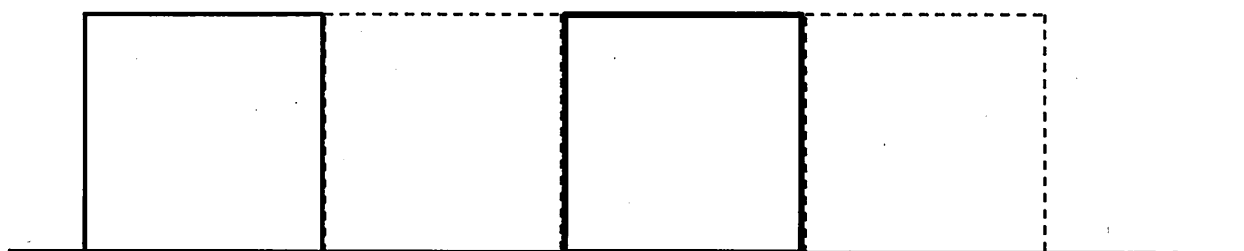
(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} L(n)$ を求めよ.

【北海道大 2003 改】

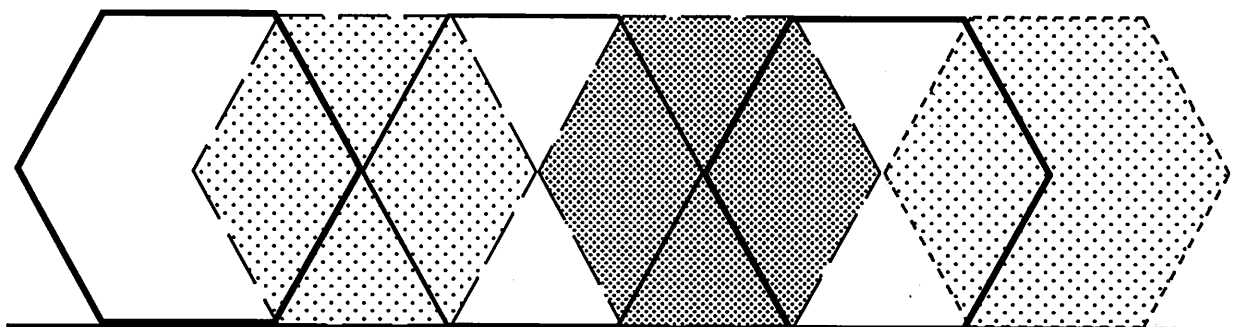
●正三角形



●正方形



●正六角形



<考察>

以上の結果をまとめると、次のようになる。

媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$, $y=g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) の長さ L は

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

例題 7 次のサイクロイドの長さを求めよ。

$$x=2(t-\sin t), \quad y=2(1-\cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

解

$$\frac{dx}{dt}=2(1-\cos t), \quad \frac{dy}{dt}=2\sin t$$

よって、求める長さ L は、

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4(1-\cos t)^2 + 4\sin^2 t} dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)} dt$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt$$

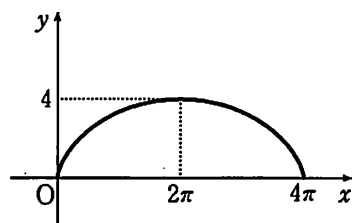
$0 \leq t \leq 2\pi$ では $\sin \frac{t}{2} \geq 0$ で

あるから

$$L = 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt$$

$$= 4 \left[-2\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 16$$



練習 13 次のアステロイドの長さを求めよ。

$$x=\cos^3 t, \quad y=\sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

B 曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線の方程式が $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) の形で与えられている場合は

$$x=t, \quad y=f(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

と考えると $\frac{dx}{dt}=1, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}=f'(x)$

である。よって、この曲線の長さ L は次のようになる。

曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) の長さ L は

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

例題 8 曲線 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ($0 \leq x \leq 1$) の長さを求めよ。

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ から

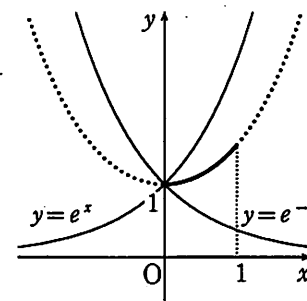
$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$$

$$= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$$

よって、求める長さ L は

$$L = \int_0^1 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx$$

$$= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$



【注意】 $a > 0$ とするとき、 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ で表される曲線を 懸垂線 または カテナリー という。

練習 14 曲線 $y=x\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq \frac{4}{3}$) の長さを求めよ。